

## Résumé

Les isolants topologiques sont des isolants au sens de la structure de bande, mais sont fondamentalement différents des isolants dans la limite atomique. Il est impossible de différencier ces deux phases à l'aide d'un paramètre d'ordre local, car seule une grandeur physique globale appelée invariant topologique permet de faire cela. Un invariant topologique est par définition une grandeur qui ne dépend pas des détails microscopiques du système, et dont la valeur ne peut changer qu'en cas de fermeture du gap. L'effet Hall quantique est le premier exemple d'isolant topologique. Une phase similaire appelée isolant de Chern peut exister en l'absence de champ magnétique. Lorsque le système préserve certaines symétries, comme la symétrie par renversement du temps, on peut définir d'autres types de phases topologiques. En présence d'interactions fortes, des excitations exotiques – ni bosons ni fermions – appelées anyons peuvent apparaître dans les isolants topologiques, qui portent alors le nom d'isolants topologiques fractionnaires. Il est généralement admis que l'effet Hall quantique fractionnaire est un isolant topologique fractionnaire. La recherche d'autres systèmes expérimentaux qui réalisent ce type de phase est un enjeu important de la physique de la matière condensée.

Durant ma thèse, j'ai tenté de déterminer quelles conditions favorisaient l'émergence de différents types d'isolants topologiques fractionnaires. J'ai utilisé des simulations numériques en taille finie, obtenues par diagonalisation exacte, pour étudier le spectre de basse énergie de différents modèles susceptibles de les réaliser. J'ai d'abord concentré mes efforts sur l'étude de l'effet Hall quantique fractionnaire sur le tore. J'ai introduit une nouvelle méthode de construction projective des états de Hall les plus exotiques, complémentaire par rapport aux méthodes existantes, et décrit comment l'utiliser de façon concrète. J'ai étudié les excitations de basse énergie de deux des états de Hall les plus emblématiques, l'état de Laughlin et l'état de Moore-Read sur le tore. J'ai proposé des approximations pour les décrire, et ai vérifié la validité de ces approximations numériquement. Grâce à cette description, j'ai pu caractériser les excitations de basse énergie de l'état de Laughlin dans les isolants de Chern. J'ai aussi démontré la stabilité d'autres états de l'effet Hall quantique fractionnaire dans les isolants de Chern, tels que les états de fermion composite, ou les états de Halperin et NASS. Je me suis ensuite tournée vers l'exploration de phases fractionnaires qui n'ont pas d'équivalent dans la physique de l'effet Hall. Pour cela, on peut choisir un modèle dont l'invariant topologique (le nombre de Chern) prend une valeur plus élevée. Une autre technique consiste à choisir un modèle qui préserve une symétrie supplémentaire, telle que la symétrie par renversement du temps, ce qui modifie la nature de l'invariant topologique.

### Mots-clés:

**effet Hall quantique, isolant topologique, isolant de Chern, anyon, fractionalisation**

## Abstract

Topological insulators are band insulators which are fundamentally different from atomic insulators. These two phases of matter cannot be distinguished by a local order parameter, but only by a physical quantity called a topological invariant. By definition, a topological invariant does not depend on the microscopic details of the system and can only change if the insulating gap closes. The quantum Hall effect is the first example of a topological insulator, but the same phase can arise in the absence of a magnetic field, and is called a Chern insulator. More varied topological phases arise when additional symmetries are preserved, such as the time-reversal symmetry. In the presence of strong interactions, topological insulators may host exotic excitations called anyons, which behave neither like bosons nor like fermions. These phases are called fractional topological insulators. Strong evidence suggests that the fractional quantum Hall effect is a fractional topological insulator. The search for other experimental realization of these phases is an extremely lively field of research.

During my PhD, I tried to determine the conditions of emergence of different types of fractional topological insulators. I relied on the numerical simulation of finite size systems, using exact diagonalization to obtain the low energy spectrum of various candidate models. I first looked at the fractional quantum Hall effect on the torus, to serve as a guide to the physics of lattice systems with periodic boundary conditions. I introduced a new projective construction of exotic quantum Hall states that complements the existing construction, and described its practical implementation. I studied the low energy excitations of two of the most emblematic quantum Hall states, the Laughlin and Moore-Read states on the torus. I proposed and validated approximations to describe them. I applied this knowledge to characterize the excitations of the Laughlin state in Chern insulators. I also showed the stability of other fractional quantum Hall states in Chern insulators, the composite fermion states, and the multicomponent Halperin and NASS states. I explored the physics of fractional phases with no equivalent in a quantum Hall system, using two different strategies. First, by choosing a model with a higher value of the topological invariant (the Chern number). Second, by adding a new symmetry, such as time reversal, which changes the nature of the topological invariant.

### Keywords:

**quantum Hall effect, topological insulator, Chern insulator, anyon, fractionalization**